

Pieter Belmans

Mathematical Institute
Universität Bonn
pbelmans@math.uni-bonn.de

Aise Johan de Jong

Department of Mathematics
Columbia University, New York
dejong@math.columbia.edu

Geschiedenis

Het Stacks project

Het Stacks project is een langlopend online naslagwerk over algebraïsche meetkunde, opgericht door Aise Johan de Jong, hoogleraar aan de Columbia University in New York. Samen met Pieter Belmans, postdoc aan de Universiteit Antwerpen en de Universität Bonn, geeft hij in dit artikel een introductie tot dit bijzondere project.

In dit artikel lichten we toe hoe het Stacks project uitgegroeid is tot een van de belangrijkste referenties voor algebraïsche meetkunde, en welke rol nieuwe media kunnen spelen bij het toegankelijk maken van technische wiskundekennis. Ook proberen we een inzicht te geven in onze ervaringen bij het beheren van een wiskundig naslagwerk van deze schaal, en wat daar allemaal bij komt kijken.

Introductie

Het online naslagwerk waar we het over willen hebben is het Stacks project. Binnen de algebraïsche meetkunde is dit welbekend, maar daarbuiten is er natuurlijk weinig reden om er al van gehoord te hebben. De korte omschrijving die we zelf gebruiken voor het Stacks project is:

an open source textbook and reference work on algebraic geometry

Als boek is het een naslagwerk van meer dan 7000 pagina's, dat regelmatig wordt uitgebreid, door iedereen die een bijdrage wil leveren. Het onderwerp is algebraïsche meetkunde, en meer bijzonder *algebraïsche stacks*. Voor dit artikel is het niet zo belangrijk wat algebraïsche meetkunde, en een *stack* in het bijzonder, juist is. Ben je toch nieuwsgierig? Voor een korte introductie verwijzen we je naar het kader

op de volgende pagina, en voor een uitgebreide introductie naar [4]. Maar de reden waarom het in dit themanummer een rol heeft is dat het ook helemaal (en bij voorkeur) online te lezen is via de website

<https://stacks.math.columbia.edu>

en we willen kort toelichten hoe dit tot stand gekomen is, en hoe er samengewerkt kan worden rond wiskunde op het internet.

Geschiedenis

Kiem van een idee

Geïnspireerd op opensource-programmeerprojecten, en in het bijzonder de Linux-kernel, stelde de Nederlandse wiskundige Aise Johan de Jong op 20 juni 2005 een wiskundige samenwerking voor. Met een groep wiskundigen zou hij een boek schrijven dat kon dienen als introductie tot de

theorie van algebraïsche stacks. De samenwerking zou wel anders verlopen dan gebruikelijk bij het schrijven van een wiskundeboek:

1. samen met gevestigde waarden in het onderzoek zou er een basistekst geschreven worden;
2. die basistekst zou op een website gepubliceerd worden;
3. waarna geïnteresseerde collega's en studenten bijdragen door correcties en nieuwe bijdragen in te sturen, waarbij alles besproken wordt via een mailinglist.

Belangrijk hierbij zou ook zijn dat alles met een 'opensource-licentie' gepubliceerd wordt. Voor programmeerprojecten is zoiets niet ongebruikelijk, waarbij de broncode van een programma publiek beschikbaar is, en iedereen wijzigingen mag aanbrengen en verspreiden. Maar voor wiskundeboeken was zoiets ongehoord.

In zekere zin kan je hierbij de parallel trekken met Wikipedia, dat bestaat sinds 2001, en in 2005 het populairste online naslagwerk werd, en ook opensource is. Hier is er niet echt sprake van broncode, maar van tekst, die iedereen kan verbeteren. Maar in tegenstelling tot Wikipedia, dat een brede encyclopedie over alle onderwerpen is en vooral informatie uit andere bronnen herwerkt en aanbiedt, zou dit een wiskundeboek over één specifiek onderwerp zijn, waar bovendien op dat moment nog niet veel andere boeken over geschreven waren.



Het logo van het Stacks project

Algebraïsche stacks

In algebraïsche meetkunde is het idee van een *moduliruimte* heel erg belangrijk (zie ook de beschrijving van de stelling van Deligne–Mumford op de volgende pagina). De idee is dat we bepaalde objecten proberen te classificeren aan de hand van een meetkundig object (de moduliruimte). Het probleem is dat de objecten die we proberen te classificeren symmetrieën kunnen hebben, en in de gebruikelijke theorie van algebraïsche meetkunde (waar de centrale objecten zogeheten *schema's* zijn) betekent dit dat onze moduliruimte nooit beschreven kan worden aan de hand van een schema.

De theorie van *algebraïsche stacks* is het technische framework waarin we wél kunnen werken met symmetrieën. In zekere zin *definiëren* we stacks op zo'n manier dat ze tautologisch een oplossing vormen voor het probleem van de symmetrieën. Erg belangrijk voor zo'n tautologische oplossing is natuurlijk dat we er ook daadwerkelijk iets zinvols mee kunnen doen. Het werk van Deligne–Mumford, en later Artin, toont aan dat deze definitie inderdaad een werkbare theorie oplevert: we kunnen belangrijke conclusies trekken over de eigenschappen van deze veralgemeende moduliruitte, en de objecten die ze parametriseren.

Een belangrijke parallel kan getrokken worden met de theorie van distributies in de maattheorie. Om bepaalde constructies goed te laten werken is het nodig om de definitie van een functie uit te breiden. Het belangrijkste voorbeeld hiervan is *Diracs deltafunctie*. Deze *veralgemeende* functie, gedefinieerd op de reële getallen, heeft waarde 0 voor alle elementen $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, en voor $0 \in \mathbb{R}$ is de waarde 'oneindig', maar wel op zo'n manier dat $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$. Dit is natuurlijk geen goed gedefinieerde functie! Maar door de notie van functie uit te breiden tot deze klasse van veralgemeende functies, is het mogelijk om nieuwe stellingen in de maattheorie te bewijzen. Zo zijn ook stacks een veralgemening van de gebruikelijke notie van schema's in algebraïsche meetkunde, waarmee we nog steeds interessante conclusies kunnen trekken, al wordt de theorie wel zeer technisch.

Naast vele enthousiaste reacties werd er op dit plan ook met enige (gefundeerde) scepsis gereageerd [1]:

“Hi Johan et al. Here's why I think this project won't work *yet*, and feel free to prove me wrong!” — *Kevin Buzzard, 2005*

Samengevat waren zijn argumenten dat:

- De Linux-kernel is niet van dag 1 geschreven door een team van programmeurs: Torvalds heeft eerst eigenhandig de kernel geschreven, en pas toen deze levensvatbaar bleek zijn er anderen bij betrokken.
- Door met vele wiskundigen samen te werken zijn er net zoveel meningen over de best mogelijke aanpak (over inhoud, over de technische aanpak, over notatie,...), en krijg je zowel conflicterende meningen als heel veel communicatie-overhead.

Buzzard reikte ook een mogelijke oplossing aan:

“I also conjecture that essentially the *only* way that my pessimistic prediction above will fail is that Johan himself stops doing his research and spends 6 months writing version 0 of

the *entire book*. I don't know whether he is prepared to do this. But I feel that this is absolutely key because it is the unique way to give concrete direction to the project. [...] but if he just sits down and writes several hundred pages by himself then whenever anyone asks a question like this, he can just point to the book and say “that's what I think it should be like, you go ahead and add some more stuff if you think differently”.” — *Kevin Buzzard, 2005*

Interessant om op te merken is ook de parallel tussen Kevins opmerking over hoe Johan voor een half jaar zijn onderzoek zou moeten stopzetten, en de rol die Kevin nu speelt in de formalisatie van wiskunde. Dit is ook een grootschalig open-source-project, waarbij hij sinds 2017 een leidende rol heeft opgenomen. Hiervoor heeft hij ook in zekere mate onderzoek in de algebraïsche getaltheorie *on hold* moeten zetten [2]:

“So I have decided to stop attempting to generate new mathematics, and concentrate instead on carefully checking ‘known’ mathematics on a computer.” — *Kevin Buzzard, 2020*

Een valse, en de echte start

Na een uitgebreide discussie over het idee in juli 2005, was er van een tekst schrijven nog niks terecht gekomen. Op het einde van de maand was er alleen maar een heel rudimentaire website waar het idee werd toegelicht, en een paar technische zaken rond de mogelijke samenwerking en het weergeven van pdf's waren uitgewerkt.

In september en oktober 2005 werd een voorlopige structuur opgezet door Johan, waarbij sommige secties al enige invulling kregen, maar de meeste secties waren slechts een placeholder om de structuur duidelijk te maken. De daaropvolgende weken waren er zogeheten ‘patches’, waarbij deelnemers van de mailinglist (voornamelijk promovendi van Johan zelf) kleine bijdragen leverden. Uiteindelijk was er een document van zo'n 70 pagina's, en begin 2006 viel het project stil.

Als we een echte startdatum op het Stacks project willen plakken is dat *21 mei 2008*. Op die dag zag het Stacks project zoals we dat nu kennen de ‘Initial commit’ in Git (een versiebeheersysteem), waarbij er werd vertrokken van de tekst die in 2006 geproduceerd was. Hier werden twee belangrijke keuzes gemaakt:

- Johan zou nu eerst grotendeels zelf aan de slag gaan met het materiaal.
- Het versiebeheer zou met Git gebeuren.

Oorspronkelijk was het de bedoeling om zo laagdrempelig mogelijk te blijven met technologie, en was er geen versiebeheersysteem in gebruik.

Een andere belangrijke keuze was een (geleidelijke) transformatie, weg van een handboek bedoeld voor wiskundigen die de theorie van stacks willen kennen, naar een volledig *naslagwerk* over die theorie. Hiervoor is een korte geschiedenisles op zijn plaats. Een van de belangrijkste wiskundigen van de twintigste eeuw was Alexander Grothendieck. In de late jaren vijftig en jaren zestig heeft hij de fundamenten van de algebraïsche meetkunde grondig hervormd, samen met zijn Parijse collega's.

In het bijzonder heeft hij samen met Jean Dieudonné de boekencyclus *Éléments de Géométrie Algébrique* (kortweg EGA) geschreven, waar hij de theorie van schema's van de grond af heeft opgebouwd. Oorspronkelijk gepland als een reeks van dertien boeken, zijn er vier daadwerkelijk afgevoerd en verschenen in acht volumes. En in tegenstelling tot de gebruikelijke handboe-

ken, is EGA van een heel systematische en encyclopedische aard, waarbij geen details worden geschuwd. De meeste studenten worden danig afgeschrikt door zo'n stijl!

Parallel daarmee organiseerde hij een invloedrijke reeks seminars in het prestigieuze Institut des Hautes Études Scientifiques in Parijs, die zijn verschenen in de boekencyclus *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie* (kortweg SGA), verdeeld over zeven boeken, voor elke jaargang één, in twaalf volumes). Hier werden meer geavanceerde onderwerpen uitgewerkt, waaronder ook belangrijke elementen voor de theorie van stacks.

In de discussiefase in 2005 werd al de mogelijkheid geopperd om van het Stacks project een 'EGA/SGA for algebraic stacks' te maken. Een werk van nog langere adem dan een 'gewoon' handboek! Maar sinds de échte start van het Stacks project in 2008 is het Stacks project stilaan geëvolueerd naar zo'n encyclopedisch naslagwerk, waarbij de focus minder lag op een expositie voor studenten (waarbij er vaak simplificaties van de theorie worden uitgevoerd) en meer op stellingen in de juiste algemeenheid formuleren.

Een andere belangrijke ontwikkeling in het Stacks project is de introductie van tags, om op een stabiele manier naar resultaten te kunnen verwijzen. Daar hebben we het verderop in meer detail over.

Het Stacks project gaat online

Het eerste jaar was het Stacks project enkel te bekijken als een verzameling pdf's. Na de invoering van tags was het ook mogelijk om de rauwe \LaTeX -code van een tag te lezen, maar van navigatie was nog geen sprake. Daarom stelde Johan op 6 mei 2012 via zijn blog een project voor, waarvoor hij een geïnteresseerde student zocht, om een commentsysteem voor het bestaande rudimentaire tag-lookup-systeem te maken. De enige concrete respons kwam van de co-auteur van dit artikel, op dat moment een masterstudent wiskunde met een achtergrond in webdevelopment. Voortbouwend op de bestaande infrastructuur, waarbij de \LaTeX -code nog steeds centraal stond, werd op 19 juli 2012 een eerste echte website voor het Stacks project online gezet. Hierbij was het mogelijk om te navigeren in het Stacks project, te zoeken in secties en lemma's, en commentaar achter te laten.

Op 15 december 2012 kwam dan versie 1.1 online: gebruikmakend van MathJax, en

een zelfgeschreven \LaTeX -parser, was het nu mogelijk om het Stacks project volledig vanuit je browser te lezen. Op dat moment was het dus niet meer nodig om te werken met onhandig grote en lange pdf's: op dat moment was het Stacks project immers al 3000 pagina's lang. En op 30 juli 2013 was het tijd voor versie 1.2, wat in zekere zin de eerste volledig afgewerkte versie was. Naast verbeteringen aan de layout en navigatie, waren er nu ook statistieken, en dependency graphs voor elke tag.

De manier waarop de website voor het Stacks project werkte was op dat moment heel erg ad hoc. Ondanks de interesse die mensen toonden om dezelfde infrastructuur te gebruiken, bleek dat te lastig om uit te werken. Daarom werd in 2017 beslist om aan een nieuwe versie te beginnen, die gebruik moest maken van een veel flexibeler infrastructuur. Bovendien waren smartphones nu zo ingeburgerd dat het belangrijk was dat de website ook op die apparaten goed zou werken. Na het nodige werk kwam op 21 mei 2018 versie 2 van de website online, de dag dat het Stacks project tien jaar oud werd.

Over de technische kant van de website hebben we het verderop in dit artikel.

De belofte van Deligne–Mumford

Op 14 augustus 2017, bijna tien jaar na het daadwerkelijke begin van het Stacks project, werd in zekere zin het oorspronkelijke doel bereikt. Op die dag werd tag 0E9C toegevoegd. Het statement van deze stelling is als volgt.

Stelling (Deligne–Mumford). *Stel $g \geq 2$. De algebraïsche stack $\overline{\mathcal{M}}_g$ is een deligne–mumfordstack, die proper en glad is over $\text{Spec } \mathbb{Z}$. De locus \mathcal{M}_g die gladde krommen parametrizeert is een dichte open deelstack.*

Deze stelling is het hoofdresultaat uit het 'oerartikel' [3] van Deligne en Mumford dat stacks introduceert, en wordt daar als Theorem 5.2 gegeven. Het bewijs hiervan gebruikt 6610 tags in het Stacks project, bijna een derde dus van alle resultaten in het Stacks project. Deze tags zijn verspreid over 1521 secties, bijna de helft van alle secties in het Stacks project zijn dus belangrijk voor deze stelling. Op die manier is het dus ook de meest complexe stelling uit het Stacks project!

Het is belangrijk om hierbij op te merken dat toen deze stelling werd geformuleerd in 1969, een heel groot deel van de

Stelling van Deligne–Mumford

De stelling van Deligne–Mumford geeft meetkundige eigenschappen van een heel belangrijke *moduliruimte*. In veel takken van de wiskunde proberen we objecten te classificeren, en een van de manieren om zo'n classificatie te beschrijven is aan de hand van een moduliruimte. In algebraïsche meetkunde is een van de eerste klassen van objecten die we proberen te classificeren die van de gladde projectieve krommen. De eerste ruwe classificatie groepeerde die krommen op het *genus* g , een natuurlijk getal, en in deze context beschouwen we $g \geq 2$. Vervolgens willen we voor elk genus de classificatie van krommen begrijpen.

Een moduliruimte is een manier om zo'n classificatie te omschrijven: we construeren een meetkundig object, waarvan de punten overeenkomen met de objecten die we willen classificeren. Voor de classificatie van gladde projectieve krommen is het object \mathcal{M}_g een algebraïsche stack, waarvan de stelling van Deligne–Mumford aantoonde dat deze 'beheersbaar' is in zekere zin. Zo'n beheersbare stack noemen we *deligne–mumford*, naar aanleiding van hun stelling. Dit betekent ruwweg dat de objecten die we proberen te classificeren slechts eindig veel symmetrieën hebben. Voor een kromme C (over de complexe getallen) zegt de stelling van Hurwitz (uit 1893) dat de symmetrieën van C een groep met hoogstens $84(g-1)$ elementen vormt. De eigenschappen van de stack \mathcal{M}_g impliceren dat deze groep altijd *eindig* is, ook wanneer we krommen over andere velden bestuderen.

Het belangrijke inzicht van Deligne en Mumford is dat we de classificatie van gladde projectieve krommen kunnen uitbreiden tot krommen met specifieke singulariteiten. Zo bekomen ze een *compactificatie* van \mathcal{M}_g . Deze noteren we als $\overline{\mathcal{M}}_g$. Zo'n compactificatie is heel zinvol, omdat we op die manier begrijpen hoe de classificatie van krommen zich gedraagt als we onze krommen variëren, en hoe de krommen geclassificeerd door 'punten op oneindig' eruitzien.



fundamenten van de theorie van algebraïsche stacks nog niet waren uitgewerkt. Deligne en Mumford schrijven hierover in hun artikel het volgende:

“Full details on the basic properties and theorems for algebraic stacks will be given elsewhere.” — *Pierre Deligne en David Mumford, in [3], 1969*

Tussen 1969 en 2017 zijn vele (zo niet alle) details reeds besproken in verschillende artikelen en boeken [6,10], maar nergens werden ze systematisch uitgelegd zoals in het Stacks project.

Workshops

In Salt Lake City in 2015, tijdens de grote conferentie over algebraïsche meetkunde die eens per decennium wordt georganiseerd, zaten Johan de Jong, Pieter Belmans en Wei Ho samen om te brainstormen over een workshop. Deze zou een combinatie van een conferentie en summerschool zijn, met als onderwerp de algebraïsche meetkunde die het onderwerp vormt van het Stacks project.

In de week van 31 juli tot en met 4 augustus 2017 was het zover. De eerste *Stacks project workshop* vond plaats aan de University of Michigan, in Ann Arbor. In kleine groepjes leerden promovendi en postdocs rechtstreeks van experts in het vakgebied over algebraïsche stacks. Met het Stacks project als fundament schreven sommige groepjes zelfs expositie-artikelen over hun onderwerp. En er werd ook uitgebreid gebrainstormd over hoe de toekomst van het Stacks project eruit moest zien: de kiemen voor de tweede versie van de website zijn die week gelegd.

Een tweede editie werd georganiseerd in de week van 3 tot en met 7 augustus 2020, dit keer als de online conferentie SPONGE (Stacks Project Online Geometry Event).

Hoe kan ik bijdragen?

In tegenstelling tot bijvoorbeeld Wikipedia, kan niet iedereen zomaar de tekst van het Stacks project wijzigen. Het grootste deel van het materiaal wordt geschreven door Johan de Jong, die ook optreedt als beheerder van het Stacks project. De wiskundige correctheid en consistentie moet immers bewaard blijven.

Als je wil bijdragen aan het Stacks project kan dat op vele manieren. De meest laagdrempelige is:

- Een berichtje achterlaten in de commentaarsectie van een tag.

Wanneer je ergens een kleine tikfout ziet of een vraag hebt over een bepaalde stap in een bewijs, is dit de gemakkelijkste manier om dit te melden. Regelmatig worden zulke comments verwerkt.

Je kan ook meer substantiële zaken bijdragen aan het Stacks project, zoals het bewijs van een lemma waarbij nu nog ‘Proof omitted’ staat. Of een interessant (tegen)voorbeeld bij een bepaalde stelling. Wanneer je dat gedaan hebt kan je:

- Een mail sturen naar `stacks.project@gmail.com`.
- Als je heel tech-savvy bent kan je de *repository* op GitHub *forken*, de tekst wijzigen, en vervolgens een *pull request* plaatsen.

In beide gevallen wordt er gekeken welke wijzigingen er nodig zijn om de interne consistentie van het Stacks project te bewaren, en wordt het op de juiste manier in het Stacks project ingepast.

Als je echt ambitieus bent kan je ook hele secties bijdragen. Zo heeft Alex Perry bijvoorbeeld sectie 058B geschreven, in 2010, toen hij nog een bachelorstudent van Johan was. Wat ook een mogelijkheid is, is dat bestaande cursusnota’s of overzichtsartikelen worden herwerkt tot een hoofdstuk in het Stacks project. Een mooi voorbeeld hiervan is het artikel [5], dat in-

tegraal is opgenomen in het Stacks project in de tags ODR4 en ODRE.

Een wiskundig naslagwerk

Tags

In een wiskundetekst worden de definities, lemma’s en stellingen doorgaans genummerd. Maar in tegenstelling tot de meeste wiskundeteksten is het Stacks project nooit ‘aP’, en groeit het bovendien niet lineair. Als blijkt dat er een nieuwe sectie nodig is, wordt het op de plek toegevoegd waar die sectie het beste past. Maar dat betekent dat ‘Stelling 13.9.2’ plots ‘Stelling 13.10.2’ kan worden, omdat er nieuwe Sectie 13.9 is toegevoegd. Ook kan na verloop van tijd blijken dat de organisatie van een bepaald hoofdstuk niet optimaal is. In plaats van vast te houden aan een organisch gegroeide janboel is het dan wenselijk om de tekst te herorganiseren. Maar dan wijzigt de nummering van de resultaten natuurlijk ook.

Dus om het verwijzen naar en het citeren van het Stacks project zo stabiel mogelijk te maken, bestaat er een alternatieve manier om naar resultaten te verwijzen. Dit gebeurt in de vorm van *tags*. Dat is een reeks van vier letters en cijfers, die uniek overeenkomt met een bepaald resultaat. Zo heeft het yonedalemma (een

Tags

Een tag is een *unieke* en *stabiele* identificatie van een resultaat in het Stacks project. Het bestaat uit vier cijfers en letters. In theorie zijn er dus $36^4 = 1679616$ tags mogelijk. Maar omdat er verwarring kan optreden tussen het bijvoorbeeld cijfer 0 en de letter O, wordt de letter O nu niet meer gebruikt. Er zijn wel 302 tags die al toegewezen waren vooraleer we hadden ingezien dat het een goed idee is om bepaalde letters te vermijden... Tags worden *chronologisch* toegewezen: ze komen dus niet overeen met de volgorde in het Stacks project (omdat die nu eenmaal kan wijzigen). Telkens als er een nieuw resultaat (of een paar resultaten tegelijk) afgewerkt is, worden er nieuwe tags toegewezen.

$\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ nisch houden we tags bij in een (ondertussen niet meer zo klein) tekstbestandje. Aan elk label in de $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -code wordt een tag geassocieerd. Het resultaat dat hoort bij dat label mag dus verplaatst worden, de tag blijft hetzelfde. Het label zelf mag ook van naam veranderen, als dat nodig blijkt. Een klein deeltje van het tags-bestand in de buurt van de tag voor het yonedalemma ziet er uit als:

```
001N, categories-definition-contravariant
001O, categories-example-hom-functor
001P, categories-lemma-yoneda
001Q, categories-definition-representable-functor
001R, categories-section-products-pairs
```

Nu je weet wat een tag is, kan je naar tag 0260 gaan om de definitie van een algebraïsche stack te lezen. Eerlijkheid gebiedt ons wel te zeggen dat die (op dit moment) pas na meer dan 6000 pagina’s ander materiaal komt...

aantal pagina's	7019
aantal tags	19917
aantal secties	3101
aantal hoofdstukken	114
aantal regels \LaTeX -code	703138
aantal personen die een bijdrage hebben geleverd	406
gemiddeld aantal bezoekers per dag op de website	2000
gemiddeld aantal unieke bezoekers per maand op de website	25000

Tabel 1 Het Stacks project in enkele getallen (status op 11 augustus 2020).

heel belangrijk basisresultaat in categorie-theorie) tag 001P, terwijl het lemma van Nakayama (een heel belangrijk basisresultaat in commutatieve algebra) tag 00DV. Door de tag te citeren heb je altijd het juiste resultaat.

Wat ook belangrijk is voor de goede werking van een naslagwerk is dat wanneer je vandaag iets citeert, die citatie volgende week ook nog van toepassing is. Daarom hanteert het Stacks project de richtlijn dat een resultaat *enkel algemener mag worden*: wanneer je het dan citeert, weet je dat het resultaat volgende week ook nog bruikbaar is zonder dat je je eigen artikel dient aan te passen. Het is ook mogelijk dat een resultaat op een bepaald moment overbodig wordt, omdat er een algemenere stelling wordt toegevoegd aan het Stacks project. Om citaties niet ongeldig te maken wordt het resultaat daarom niet verwijderd, maar verplaatst naar een hoofdstuk met tags die op pensioen mogen.

In het prille begin gebruikte het Stacks project geen tags. Maar redelijk vroeg werd duidelijk dat voor een organisch groeiende wiskundetekst er een stabiel referentiesysteem nodig is. Na een suggestie van Cathy O'Neil (bekend van mathbabe.org en *Weapons of Math Destruction*) is op 16 mei 2009 dit systeem met tags ingevoerd. Het Stacks project bevatte toen opeens 3026 tags! Wanneer je dus naar het Stacks project wil verwijzen, doe je dat best met de tag, en niet met de nummer van de stelling.

Statistieken

Omdat het Stacks project zo groot is, kunnen we een paar interessante statistieken meegeven.

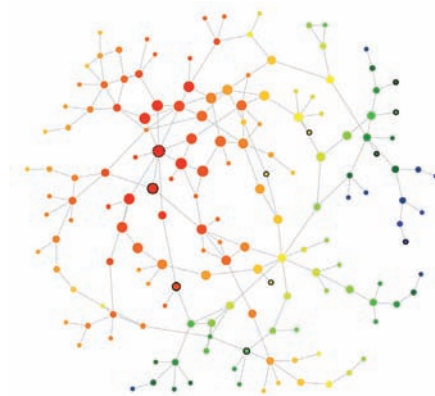
- *Meest gerefereerde resultaat*: voor Nakayama's lemma, zie tag 00DV, zijn er 121 tags die er direct naar verwijzen in hun bewijs.

- *Meest gebruikte resultaat*: een basisstelling over ringen, zie tag 00E0, heeft 6750 indirecte verwijzingen.
- *Meest complexe bewijs*: de stelling van Deligne–Mumford, zie tag 0E9C, steunt op 6610 andere tags, en is daarmee het bewijs dat op de meeste andere resultaten steunt.

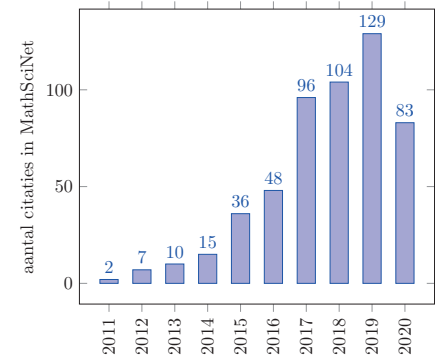
In Tabel 1 hebben we enkele andere getallen verzameld, en in Figuur 1 wordt het aantal citaties van het Stacks project, zoals bepaald door MathSciNet, weergegeven.

Het is ook mogelijk om de structuur van een bewijs in het Stacks project te visualiseren. Zo kan je een idee krijgen van de complexiteit van een resultaat. In Figuur 2 zie je zo de *dependency graph* van tag 01WC.

Het resultaat zelf is de rode bol met kartelrand een beetje linksboven het midden. Het bewijs daarvan steunt op negen andere resultaten in het Stacks project. Elk van die resultaten steunt dan weer op andere resultaten. (Het is belangrijk dat het Stacks project *acyclisch* is, zodat er geen cirkelredeneringen plaatsvinden!) Des te verder je weggaat van het resultaat dat je aan het bewijzen bent, des te meer we van rood naar blauw gaan.



Figuur 2 Een dependency graph.



Figuur 1 Citaties in MathSciNet (11 augustus 2020).

Voor de stelling van Deligne–Mumford waar we het eerder over hadden zou die dependency graph bijna 7000 knopen tellen!

De techniek achter het Stacks project

Wiskundigen zijn het gewend om in \LaTeX te schrijven. Voor het Stacks project is dat niet anders: op deze manier kan (in theorie) elke meetkundige eenvoudig een bijdrage leveren.

Normaal gezien wordt \LaTeX *gebuilt* naar pdf, en is dat het eindresultaat. Maar een gigantische pdf zoals voor het Stacks project is niet goed navigeerbaar of doorzoekbaar.

Er zijn ook manieren om \LaTeX naar HTML om te zetten. HyperText Markup Language (kortweg HTML) is de taal waarin websites gemaakt worden. Maar het Stacks project wil heel expliciet dat resultaten refereerbaar zijn als tags, en dat het mogelijk is om commentaar te leveren, en dat het op verschillende niveaus te navigeren is. Zulke flexibiliteit en functionaliteit is voor een statische website, gemaakt door een van de bestaande converters, niet of nauwelijks mogelijk.

Daarom is in 2017 en 2018 door Pieter Belmans, met de hulp van Raymond Cheng en Patrick Massot, de software *Gerby* geschreven. (De naam Gerby is een verwijzing naar een object in de theorie van algebraïsche stacks. Een *gerbe* is een stack met speciale eigenschappen, en bij het kiezen van de naam wilden we een subtiele link met het Stacks project houden.) Hier worden een paar bestaande open-source-programmeerprojecten gecombineerd (met als belangrijkste componenten $\text{pl}\text{\TeX}$ en Flask), om de hele workflow van het Stacks project te ondersteunen. En om wiskundige formules op een goede manier op een website te laten zien, wordt MathJax gebruikt.

Met Gerby is het mogelijk om als auteur (of groep van auteurs) gewoon een manuscript te schrijven, om vervolgens:

- tags toe te wijzen;
- $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ naar HTML te converteren;
- een database te creëren met alle tekst en metadata;

zodat je op een flexibele manier een website kan maken, zoals die van het Stacks project en Kerodon (zie hiernaast). Voor meer informatie verwijzen we je door naar <https://gerby-project.github.io>.

Kerodon

Een vraag die vaak gesteld wordt over Jacob Lurie's Kerodon is: "Wat is een kerodon?" Een kerodon is een Zuid-Amerikaanse knaagdier, verwant aan de capibara en de cavia. In Figuur 3 zie je een foto. In het wild leven ze in de rotsachtige steppe in het noordoosten van Brazilië. De idee achter deze op het eerste zicht bizarre naam is dat de daadwerkelijke inhoud van de website niet beperkt wordt door de naam. Het is immers onduidelijk waar het hele project naartoe zal evolueren. De tagline van Kerodon is dan ook voldoende breed gekozen

an online resource for homotopy-coherent mathematics

zodat het hele bereik van het werk van Lurie kan bestrijken, zonder zich vast te pinnen op één aspect.



Foto: Brian Gratwicke

Figuur 3 Kerodon rupestris.

Kerodon en andere projecten

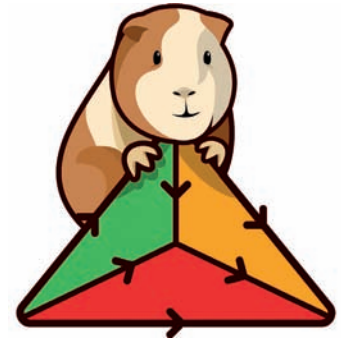
De aanpak van het Stacks project inspireert ook andere projecten met een gelijksoortige insteek. Het belangrijkste voorbeeld is Kerodon (<https://kerodon.net>) dat geschreven wordt door Jacob Lurie, een Amerikaanse wiskundige die hoogleraar is aan het Institute for Advanced Study in Princeton.

Het werk van Lurie is zeer fundamenteel, en begon met de uitbouw van een nieuw soort meetkunde: *afgeleide algebraïsche meetkunde*. Om deze theorie grondig op te bouwen is heel veel werk in categorietheorie en homotopietheorie nodig. In 2004 is hij hiermee gestart, en doorheen de jaren is het een grote verzameling van lange teksten geworden, die verschillende aspecten van de theorie bespreken.

Slechts één tekst is op de gebruikelijke manier als een lijvig boek gepubliceerd: *Higher Topos Theory* [7]. Andere teksten zijn beschikbaar als een pdf in boekvorm, de belangrijkste zijn *Higher Algebra* [8] en het work-in-progress *Spectral Algebraic Geometry* [9].

Omdat veel wiskundigen gebruikmaken van zijn resultaten citeren ze vaak zijn werk in hun eigen artikelen. Maar omdat wiskunde eigenlijk een permanent work-in-progress is, en zeker wanneer het een nieuwe theorie betreft, verandert de structuur van de tekst regelmatig, zoals bij *Higher Algebra* en *Spectral Algebraic Geometry*. Of is het eigenlijk onmogelijk om de tekst te wijzigen, zoals bij *Higher Topos Theory*, omdat er een gepubliceerde versie van bestaat.

Tijdens de Stacks project-workshop in 2017, bijgewoond door Jacob Lurie, werd de eerste kiem gelegd voor een samenwerking. De nieuwe versie van de software achter het Stacks project zou ook gebruikt worden voor zijn werk. Nadat de tweede versie van de website voor het Stacks project live kwam begon het werk aan Kero-



Het logo van Kerodon

don, en op 17 oktober 2018 werd Kerodon live gezet.

Een belangrijk verschil met het Stacks project is dat de tekst van Kerodon niet opensource is, maar iedereen is wel welkom om commentaar achter te laten op de website, die vervolgens verwerkt kan worden door Lurie zelf.

Op dit moment bestaat Kerodon uit 1921 tags, wat op papier neerkomt op bijna 700 pagina's.

Andere projecten

Het Stacks project en Kerodon, zijn gezins de enige online wiskundige naslagwerken of online wiskundige samenwerkingen, al is de combinatie van tags en *volledige bewijzen* niet zo gangbaar.

We willen zeker volgende andere initiatieven vermelden:

- *nLab*: Een publieke wiskundewiki, waar iedereen nota's kan maken. De focus ligt vooral op (hogere) categorietheorie. <https://ncatlab.org/nlab/show/HomePage>
- *HoTT*: Een opensource-handboek over homotopietypetheorie. <https://homotopytypetheory.org>
- *Polymath*: Een online samenwerking rond specifieke problemen, gelanceerd door Tim Gowers. <https://polymathprojects.org> ☞

Referenties

- 1 K. Buzzard, email van Kevin Buzzard naar de algebraic_geometry-mailinglist, 22 juli 2005, <https://math.columbia.edu/~dejong/wordpress/wp-content/uploads/2010/10/Kevin-Buzzard>.
- 2 K. Buzzard, The future of mathematics?, presentatie jan. 2020, Formal Methods in Mathematics, Pittsburgh, https://www.andrew.cmu.edu/user/avigad/meetings/fomm2020/slides/fomm_buzzard.pdf.
- 3 P. Deligne en D. Mumford, The irreducibility of the space of curves of given genus, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 36 (1969), 75–109.
- 4 D. Edidin, What is... a stack? *Notices of the AMS* 50(4) (2003), 458–459.
- 5 M. Emerton en T. Gee, Dimension theory and components of algebraic stacks, arXiv: 1704.07654.
- 6 G. Laumon en L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 39, Springer, 2000.
- 7 J. Lurie, *Higher Topos Theory*, Annals of Mathematics Studies, Vol. 170, Princeton University Press, 2009.
- 8 J. Lurie, *Higher Algebra*, <https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf>.
- 9 J. Lurie, *Spectral Algebraic Geometry*, <https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/SAG-rootfile.pdf>.
- 10 M. Olsson, Algebraic spaces and stacks, *American Mathematical Society, Colloquium Publications*, Vol. 62, AMS, 2016